(Dienstag, 08.05.18)

4.1. Definition Eine Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt diff-bar an der Stelle $A \in D$, wenn

$$f'(A) = \lim_{h \to 0} \frac{f(A+h) - f(A)}{h}$$

dieser Grenzwert existiert (d.h. $f'(A) \in \mathbb{R}$)

Falls f an jeder Stelle $A \in D$ diff-bar ist, dann ist f auf D diff-bar und die Ableitungsfunktion

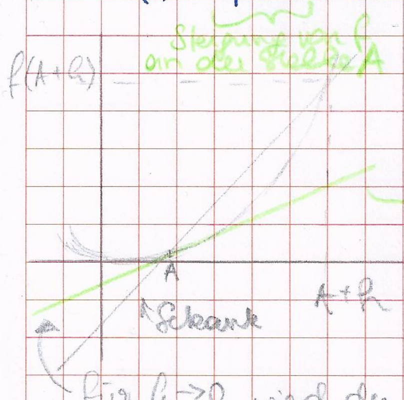
$f': D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad x \in D$$

Beispiele, Vergleich mit Stetigkeit, Bedeutung von Def. 4.1.

(i) $f'(A) - \lim \underbrace{\frac{f(A+h) - f(A)}{h}}_{}$

Steigung der Sekante durch $(A, f(A))$ und $(A+h, f(A+h))$



Steigung der Tangente an der Stelle A

für $h \to 0$ wird die Sekante zur Tangente an der Stelle A

$$f'(A) = \lim_{\substack{x \to A \\ h = x-A}} \frac{f(A+x-A) - f(A)}{x-A}$$

(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$

$$f'(A) = \lim_{\substack{x \to A \\ x \neq A}} \frac{f(x) - f(A)}{x-A} = \lim_{x \to A} \frac{0}{x-A} \to \neq 0$$

Def. von f.

$$\lim_{x \to A} 0 = 0 \qquad \text{für alle } A \in \mathbb{R}$$

Def. 4.1. $\Rightarrow$ f ist auf $\mathbb{R}$ diff-bar und $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$

(iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$

$f'(A) = a$ falls $A \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = ax + b$, $x \in \mathbb{R}$, ist diff-bar auf $\mathbb{R}$ und $f'(x) = a$, $x \in \mathbb{R}$

(d.h. $(x)' = 1$ und die Funktion $f(x) = x$ ist auf $\mathbb{R}$ diff-bar mit $f'(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$)

(iv) Stetigkeit (Satz 3.2)

$$\left(\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}},\ a_n \in D : \lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A)\right)$$

$\Longleftrightarrow$ f stetig an der Stelle $A \in D$.

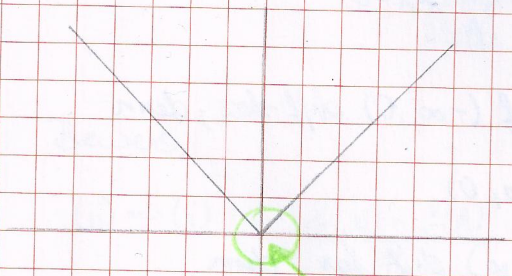
Diff-barkeit (Def. 4.1)

$\boxed{f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

$$\left(\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}},\ a_n \in D \setminus \{A\} : \lim_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow f'(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(A)}{a_n - A}\right)$$

$\Longleftrightarrow$ f ist diff-bar an der Stelle $A \in D$.

z.z. $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$, ist an der Stelle $A = 0$ nicht diff-bar



bei $x = 0$ ist f nicht diff-bar (nicht glatt, existiert keine Tangente)

existiert eine Folge

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \ \wedge$

(1. Möglichkeit) der Grenzwert von $\left(\frac{f(a_n) - f(A)}{a_n - A}\right)$ existiert nicht d.h. die Folge divergiert.

(2. Möglichkeit) es existieren zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $b_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\left(\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ und } \lim_{n\to\infty} b_n = 0\right) \wedge \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(0)}{b_n - 0}}_{\text{Grenzwerte existieren aber sind nicht gleich.}}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\left(a_n = \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad a_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \; a_n > 0 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \;\wedge$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - 0}{a_n - 0} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

und

$$\left(b_n = \frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad b_n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \; b_n < 0 : \lim -\frac{1}{n} = 0 \;\wedge$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(0)}{b_n - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{-b_n - 0}{b_n - 0} = -1$$

$\Rightarrow$ f an der Stelle $x = 0$ ist nicht diff-bar,

da $\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(0)}{a_n - 0} \neq \lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(0)}{b_n - 0}$

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist auf $(-\infty, 0)$ diff-bar, denn

$f(x) = -x$, $x \in (-\infty, 0)$

ist auf $(0, \infty)$ diff-bar, denn

$f(x) = x$, $x \in (0, \infty)$

f ist auf $\mathbb{R}$ nicht diff.-bar (da f in $x = 0$ nicht diff-bar ist)

Ist f stetig diff-bar auf $\mathbb{R}$? (d.h. ist f diff-bar auf $\mathbb{R}$ und f' stetig auf $\mathbb{R}$?)

$\rightarrow$ Nein, da f nicht diff-bar ist.

(v) Stetigkeit und Diff-barkeit

Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, falls $f(x) \approx f(A)$ $\forall x \in (A-\delta_\varepsilon, A+\delta_\varepsilon), A \in D$

(vgl. $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in D : |x-A| < \delta : \underbrace{|f(x)-f(A)| < \varepsilon}_{f(x) \approx f(A)}$)

Die Funktion $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist diff-bar, wenn

$f(x) \approx f(A) + f'(A)(x-A) \quad \forall x \in (A-\delta, A+\delta)$

denn Proposition: Seien $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A \in D$

dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) $\lim\limits_{\substack{x \to A \\ (x \neq A)}} \frac{f(x)-f(A)}{x-A} = f'(A)$

(ii) $f(x) = \underbrace{f(A) + f'(A)(x-A)}_{\text{Tangente an der Stelle } A.} + \underbrace{g(x)}_{\lim\limits_{x \to A} g(x) = 0}(x-A)$

(ii) ziehe $f(A)$ ab und teile durch $(x-A)$

Beweis

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\frac{f(x)-f(A)}{x-A} = f'(A) + g(x)$, $x \in D$

$$\lim_{x \to A} \frac{f(x)-f(A)}{x-A} = \lim_{x \to A} \Big(\underbrace{f'(A)}_{\in \mathbb{R}} + g(x) \Big)$$

Konstante

$$= f'(A) + \underbrace{\lim_{x \to A} g(x)}_{(ii)\ = 0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to A} \frac{f(x)-f(A)}{x-A} = f'(A) \Rightarrow \text{(i)}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Definiere $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(A)}{x-0} - f'(A), & x \in D \setminus \{A\} \\ 0 & , x = A, x \in D \end{cases}$

Dann gilt $\lim\limits_{\substack{x \to A \\ (x \neq A)}} g(x) = \lim\limits_{x \to A} \Big(\frac{f(x)-f(A)}{x-A} - f'(A) \Big) \overset{*}{=} \lim\limits_{x \to A} \frac{f(x)-f(A)}{x-A} - \lim\limits_{x \to A} f'(A)$

da aus (i) folgt, dass beide Grenzwerte existieren

$$* = \lim_{x \to A} \frac{f(x) - f(A)}{x - A} - \lim_{x \to A} f'(A) = f'(A) - f'(A) = 0 \Rightarrow \text{(ii)}$$